UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

Matej Filip

REŠENE NALOGE IZ IZPITOV PRI PREDMETU MATEMATIKA 1 VISOKOŠOLSKI ŠTUDIJ

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2026

UVOD

Naloge na naslednjih straneh so bile na pisnih izpitih v študijskih letih 2019/20–2024/25 pri predmetu Matematika 1, ki je obvezni predmet za študente, vpisane na visokošolski dodiplomski študijski program Elektrotehnika, na Univerzi v Ljubljani.

Izpit iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

11. februar 2020

1. [25T] Določite definicijsko območje ter izračunajte ničle, pole, asimptote, stacionarne točke (prevojev ni potrebno natančno izračunati) ter intervale naraščanja in padanja funkcije

$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x^2}.$$

Funkcijo $f(x)$ čimbolj natančno narišite.

Rešitev.

(1) Definicijsko območje. Imamo $1 - x^2 \neq 0$, zato $x \neq \pm 1$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

(2) Ničle. Ničle dobimo iz $1 + x + x^2 = 0$. Diskriminanta je

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0,$$

zato realnih ničel ni. Torej $f(x)$ nima ničel.

(3) Poli (navpični asimptoti). Ker je $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, sta enojna pola pri

$$x = 1, \qquad x = -1.$$

Za orientacijo limit:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty,$$

ker je števec pri ± 1 pozitiven, imenovalec pa menja predznak.

(4) Vodoravna asimptota. Stopnji števca in imenovalca sta enaki; vodoravna asimptota je razmerje vodilnih koeficientov:

$$y = \frac{1}{-1} = -1.$$

(Alternativno: razcep na parcialne ulomke

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)},$$

od koder takoj sledi $f(x) \to -1$ pri $x \to \pm\infty$.)

(5) Prvi odvod, stacionarne točke, naraščanje/padanje. Z odvajanjem (kvocientno pravilo) dobimo

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2}.$$

Ker je $(x^2-1)^2 > 0$ za vsak $x \in D_f$, predznak $f'(x)$ določa samo števec x^2+4x+1. Rešitev $x^2+4x+1=0$ da

$$x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

To sta stacionarni točki. Njuni ordinati:

$$f(-2-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad f(-2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ker je kvadratna funkcija x^2+4x+1 navzgor odprta, velja:

$f'(x) > 0$ za $x < -2-\sqrt{3}$ in $x > -2+\sqrt{3}$, $\qquad f'(x) < 0$ za $-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$.

Upoštevamo še prekinitvi pri $x = \pm 1$ in dobimo intervale:

$$\text{narašča na } (-\infty, -2-\sqrt{3}) \;\cup\; (-2+\sqrt{3}, 1) \;\cup\; (1, \infty),$$

$$\text{pada na } (-2-\sqrt{3}, -1) \;\cup\; (-1, -2+\sqrt{3}).$$

Zato je $(-2-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ lokalni maksimum (v veji $x < -1$), in $(-2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ lokalni minimum (v veji $-1 < x < 1$).

(6) Drugi odvod in prevoj. Izračunamo

$$f''(x) = -\frac{2\,(x^3+6x^2+3x+2)}{(x-1)^3(x+1)^3}.$$

Prevoj(i) so (v domeni) tam, kjer je $f''(x) = 0$, torej kjer je

$$x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Ta kubični polinom ima natanko eno realno ničlo, približno

$$x \approx -5.52,$$

torej je prevoj res nekje med -6 in -5.

(7) Skica grafa. Koristne točke in informacije:

$f(0) = 1$, navpični asimptoti: $x = \pm 1$, vodoravna asimptota: $y = -1$,

stacionarni točki:

$$\left(-2-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (lok. max)}, \qquad \left(-2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (lok. min)}.$$

2. [25T]

Gozdna pot ima obliko krivulje $y = x^2$. Miha se je izgubil v gozdu in se trenutno nahaja na točki $(1, 2)$. Koliko bo moral prehoditi, da po najkrajši poti pride na gozdno pot. Ena enota na vsaki koordinatni osi je dolga en kilometer.

Rešitev. Naj bo točka na poti $P(x) = (x, x^2)$. Razdalja do $A = (1, 2)$ je

$$\operatorname{dist}(P(x), A) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}.$$

Ker je koren strogo naraščajoča funkcija, je dovolj minimizirati kvadrat razdalje:

$$d(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2.$$

Odvajamo:

$$d'(x) = 2(x-1) + 2(x^2-2)\cdot 2x = 2(x-1) + 4x(x^2-2).$$

Postavimo $d'(x) = 0$:

$$2(x-1) + 4x(x^2-2) = 0 \iff (x-1) + 2x(x^2-2) = 0$$
$$\iff 2x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Polinom se faktorizira:

$$2x^3 - 3x - 1 = (x+1)\big(2x^2 - 2x - 1\big).$$

Zato dobimo tri kritične točke:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}), \qquad x_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}).$$

Ker je $d(x)$ polinom 4-te stopnje z vodilnim koeficientom > 0, velja $d(x) \to \infty$ pri $|x| \to \infty$, zato globalni minimum nastopi v eni od kritičnih točk. Primerjamo vrednosti $d(x_i)$:

$$d(-1) = 5,$$

$$d\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\right) = \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$d\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right) = \frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Najmanjša je zadnja, zato je najbližja točka na paraboli pri

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \qquad P_3 = \big(x_3, x_3^2\big) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Minimalna razdalja je

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{min}} = \sqrt{d(x_3)} = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}\ \mathrm{km}.$$

3. [25T]

(a) Izračunajte integral $\int \frac{1}{1-x^2} dx$.

(b) Izračunajte integral $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$.

Rešitev.

(a) Najprej razcepimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}.$$

Pomnožimo z $(1-x)(1+x)$:

$$1 = A(1+x) + B(1-x) = (A+B) + (A-B)x.$$

Primerjamo koeficiente:

$$A + B = 1, \qquad A - B = 0 \implies A = B = \frac{1}{2}.$$

Zato

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \left(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\right) dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C.$$

(Enakovredno: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.)

(b) Razdelimo:

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}.$$

Zato
$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$
V prvem integralu naredimo substitucijo $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$:
$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$
Drugi integral je standarden:
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x).$$
Skupaj:
$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan(x) + C.$$

4. [5T] Kateri od naslednjih določenih integralov je enak $\frac{1}{3}$:

$$a)\ \int_0^1 x dx \quad b)\ \int_0^1 \frac{x}{3} dx \quad c)\ \underline{\int_0^1 x^2 dx} \quad d)\ \int_0^1 x^3 dx \quad e)\ \int_0^1 x^4 dx \quad f)\ \int_0^1 x^5 dx.$$

Rešitev. Uporabimo obrazec
$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
Želimo $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{3}$, zato je $n+1 = 3$ in $n = 2$. Torej je pravilen odgovor $\underline{\int_0^1 x^2\,dx}$.

5. [5T] Katera od naslednjih vsot je enaka $\frac{4}{3}$:

$$a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad b)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad c)\ \underline{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k} \quad d)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k \quad e)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k \quad f)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k$$

Rešitev. Gre za geometrijsko vrsto s količnikom $r = \frac{1}{m}$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad (|r| < 1).$$

Za $r = \frac{1}{m}$ dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{m}{m-1}.$$

Želimo $\frac{m}{m-1} = \frac{4}{3}$, kar pomeni $3m = 4m - 4$, zato $m = 4$. Pravilna je <u>možnost (c)</u>.

6. [5T] Katera izmed naslednjih vrst konvergira:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^n \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{100}\right)^n \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} n1^n \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} n2^n \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} n3^n \quad f) \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{100}{n}\right)^n}$$

Rešitev. Za konvergenco je nujno, da gre člen vrste proti 0.

(a) $n^n \not\to 0$, zato vrsta divergira.

(b) Za dovolj velik n je $\left(\frac{n}{100}\right)^n \geq 1$, zato ne gre proti 0 in vrsta divergira.

(c) Tipično je mišljeno $n \cdot 1^n = n$, kar ne gre proti 0, zato divergira.

(d),(e) $n2^n$ in $n3^n$ rasteta, zato členi ne gredo proti 0 in vrsti divergirata.

(f) Uporabimo korenski kriterij. Naj bo

$$a_n = \left(\frac{100}{n}\right)^n.$$

Potem

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{100}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1,$$

zato vrsta absolutno konvergira. Pravilna je <u>(f)</u>.

7. [5T] Katera izmed naslednjih funkcij $f : D_f \to \mathbb{R}$ je surjektivna na svojem definicijskem območju D_f?

$$a)\ x^2 \quad b)\ \underline{x^3} \quad c)\ x^4 \quad d)\ e^x \quad e)\ 1 \quad f)\ -1.$$

Rešitev. Razumemo surjektivnost kot: $f(D_f) = \mathbb{R}$.

(a) $x^2 \geq 0$, zato slika ni $\mathbb{R}$.

(b) x^3 je zvezna in strogo naraščajoča na $\mathbb{R}$, poleg tega

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty,$$

zato za vsako $y \in \mathbb{R}$ obstaja $x = \sqrt[3]{y}$ s $x^3 = y$. Torej je x^3 surjektivna.

(c) $x^4 \geq 0$, zato ni surjektivna na $\mathbb{R}$.

(d) $e^x > 0$, zato slika ni $\mathbb{R}$.

(e),(f) konstanti funkciji imata sliko enega samega števila, zato nista surjektivni.

8. [5T] Kateremu številu je enak realni del kompleksnega števila $\frac{1}{\bar{z}}$?

$a)$ $\mathrm{Re}(z)$ $b)$ $\mathrm{Re}(z^2)$ $c)$ $\mathrm{Im}(z)$ $d)$ $\mathrm{Im}(z^2)$ $e)$ $\underline{\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}}$ $f)$ $\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$

Rešitev. Naj bo $z = x + iy$ ($x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$). Potem je

$$\bar{z} = x - iy, \qquad |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Izračunamo

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} \cdot \frac{x + iy}{x + iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}.$$

Realni del tega števila je

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}.$$

Pravilna je <u>možnost (e)</u>.

IZPIT iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

23. avgust 2022

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk.
Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25 T] Podana je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}.$$

   (a) Izračunajte limito $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

   (b) Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ v točki $x = 1$.

Rešitev.

Najprej domena. Ker nastopata $\sqrt{x}$ in $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ v imenovalcu, mora veljati

$$x \geq 0, \qquad \sqrt{x^2+1} \neq \sqrt{x}.$$

Enačba $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x}$ je ekvivalentna $x^2 + 1 = x$, tj. $x^2 - x + 1 = 0$, ki nima realnih rešitev ($\Delta = -3$). Zato je f definirana za vse $x \geq 0$.

(a) Limita pri $x \to \infty$. Racionaliziramo imenovalec:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x})}{(x^2+1) - x}.$$

Torej

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{x}}{x^2 - x + 1}.$$

Delimo števec in imenovalec z x^2:

$$f(x) = \frac{\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2} + \frac{x\sqrt{x}}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Ko $x \to \infty$, velja $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to 1$ in $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, imenovalec pa gre v 1. Zato

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1+0}{1} = 1.$$

(b) Tangenta na $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ **pri** $x = 1$**.** Najprej izrazimo g:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vrednost v točki 1*:*

$$g(1) = \frac{\sqrt{2}}{1} - 1 = \sqrt{2} - 1 =: y_0.$$

Odvod. Zapišimo $g(x) = A(x) - x^{-1/2}$, kjer $A(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Najprej odvajamo A (kvocientno pravilo):

$$A'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot x - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Nato

$$\frac{d}{dx}\left(-x^{-1/2}\right) = +\frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

Torej

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

V točki $x = 1$ dobimo

$$g'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} =: k.$$

Enačba tangente:

$$y - y_0 = k(x-1), \qquad y_0 = \sqrt{2} - 1, \quad k = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. [25 T] Določite definicijsko območje ter izračunajte stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije

$$f(x) = x\ln(2x).$$

Koliko je $\lim_{x\to 0} f(x)$? Čimbolj natančno narišite graf funkcije $f(x)$.

Rešitev.

(1) Definicijsko območje. Logaritem je definiran za pozitiven argument:

$$2x > 0 \iff x > 0.$$

Torej $D_f = (0, \infty)$.

(2) Limita pri $x \to 0^+$.

$$f(x) = x\ln(2x) = x(\ln 2 + \ln x) = x\ln 2 + x\ln x.$$

Ko $x \to 0^+$, velja $x\ln 2 \to 0$ in tudi $x\ln x \to 0$ (npr. substitucija $x = \frac{1}{t}$: $\frac{\ln(1/t)}{t} \to 0$). Zato

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(2x) = 0.$$

(3) Prvi odvod, stacionarna točka, naraščanje/padanje. Uporabimo produktno pravilo:

$$f'(x) = 1\cdot\ln(2x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(2x) + 1.$$

Stacionarne točke dobimo iz $f'(x) = 0$:

$$\ln(2x) + 1 = 0 \iff \ln(2x) = -1 \iff 2x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{2e}.$$

Ker je $\ln(2x)$ strogo naraščajoč, je tudi f' strogo naraščajoč in spremeni predznak natanko enkrat:

$$f'(x) < 0 \text{ za } 0 < x < \frac{1}{2e}, \qquad f'(x) > 0 \text{ za } x > \frac{1}{2e}.$$

Torej f pada na $(0, \frac{1}{2e})$ in narašča na $(\frac{1}{2e}, \infty)$. V stacionarni točki je minimum. Vrednost v minimumu:

$$f\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}\cdot(-1) = -\frac{1}{2e}.$$

(4) Drugi odvod, konveksnost/konkavnost.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\big(\ln(2x) + 1\big) = \frac{1}{x}.$$

Na $D_f = (0,\infty)$ velja $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, zato je f *konveksna* na celotnem definicijskem območju in konkavna nikjer.

(5) Skica grafa. Ključne značilnosti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \text{minimum v } \left(\frac{1}{2e}, -\frac{1}{2e}\right), \qquad f(x) \to \infty \text{ pri } x \to \infty,$$

funkcija najprej pada (iz 0 navzdol), doseže minimum, nato narašča in je povsod konveksna.

3. [25 T] Območje pašnika je omejeno s krivuljami $y = x^2 - 2$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ ter $y = -2x + 1$ ter vsebuje točko $(0, -1)$. Ena enota v koordinatnem sistemu meri 1 km. Koliko je ploščina pašnika?

Rešitev.

Najprej poiščemo presečišča robnih krivulj.

(1) Presečišče premic. Rešimo

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = -2x + 1 \iff \left(\frac{2}{3} + 2\right)x = \frac{4}{3} \iff \frac{8}{3}x = \frac{4}{3} \iff x = \frac{1}{2},$$

in nato $y = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$. Torej $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

(2) Presečišči parabole z vsako premico. *S premico $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$:*

$$x^2 - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \iff 3x^2 - 6 = 2x - 1 \iff 3x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Diskriminanta je $\Delta = 4 + 60 = 64$, zato

$$x = \frac{2 \pm 8}{6} \in \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}.$$

Ustrezni točki sta

$$A = (-1, -1), \qquad A' = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{9}\right).$$

S premico $y = -2x + 1$:

$$x^2 - 2 = -2x + 1 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x+3)(x-1) = 0,$$

torej $x \in \{-3, 1\}$ in točki sta

$$B = (-3, 7), \qquad C = (1, -1).$$

Ker mora območje vsebovati $(0, -1)$, gledamo del, ki je okoli $x \in [-1, 1]$. Opazimo:

$$A = (-1, -1) \text{ in } C = (1, -1) \text{ sta na paraboli,}$$

premici se sekata v $P = (\frac{1}{2}, 0)$, in v tem "izrezu" omejujeta zgornji rob, spodaj pa je parabola $y = x^2 - 2$.

Zato ploščino razdelimo na:

- S_1: ploščina trikotnika z oglišči $A = (-1, -1)$, $C = (1, -1)$ in $P = (\frac{1}{2}, 0)$ (to je del med premicama nad $y = -1$),
- S_2: ploščina med premico $y = -1$ in parabolo $y = x^2 - 2$ na intervalu $[-1, 1]$.

(3) Ploščina trikotnika S_1. Osnova je daljica AC dolžine 2 (ker sta $x = -1$ in $x = 1$), višina do premice $y = -1$ je $0 - (-1) = 1$. Torej

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

(4) Ploščina med $y = -1$ in parabolo na $[-1, 1]$. Ker je parabola $y = x^2 - 2$ pod $y = -1$ (na $[-1, 1]$ velja $x^2 - 2 \leq -1$), dobimo

$$S_2 = \int_{-1}^{1} \Big((-1) - (x^2 - 2)\Big)\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx.$$

Izračun:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

(5) Skupna ploščina.

$$S = S_1 + S_2 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \text{ km}^2 = 2\frac{1}{3} \text{ km}^2.$$

4. [5 T] Koliko meri polarni kot kompleksnega števila $-\sqrt{3} + i\sqrt{3}$?

$$a)\ 0 \quad b)\ \frac{\pi}{4} \quad c)\ \frac{\pi}{2} \quad d)\ \underline{\frac{3\pi}{4}} \quad e)\ \frac{5\pi}{4} \quad f)\ \frac{7\pi}{4}$$

Rešitev. Kompleksno število je

$$z = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}.$$

Realni del je negativen, imaginarni del pozitiven, zato je z v *drugem kvadrantu.* Izračunamo tangens kota:

$$\tan\varphi = \frac{\Im z}{\Re z} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1.$$

Referenčni kot je $\frac{\pi}{4}$. Ker smo v drugem kvadrantu:

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Pravilna je možnost $\underline{\text{(d)}}$.

5. [5 T] Katera izmed spodnjih množic je množica stekališč zaporedja s splošnim členom $a_n = (-1)^n(\frac{n+1}{n^2})$?

$a)$ $\{-1\}$ $b)$ $\underline{\{0\}}$ $c)$ $\{1\}$ $d)$ $\{-1,1\}$ $e)$ $\{0,1\}$ $f)$ $\{-1,0,1\}$

Rešitev. Najprej poenostavimo:

$$a_n = (-1)^n\frac{n+1}{n^2} = (-1)^n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Ker $\frac{1}{n} \to 0$ in $\frac{1}{n^2} \to 0$, velja

$$\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \to 0.$$

Množenje z $(-1)^n$ samo menja predznak, velikost pa gre proti 0, zato

$$a_n \to 0.$$

Zaporedje ima torej natanko eno stekališče, in sicer 0, zato je pravilno $\underline{\text{(b)}}$.

6. [5 T] Koliko je vsota vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n?$$

$a)$ 0 $b)$ 1 $c)$ $\underline{2}$ $d)$ 3 $e)$ 4 $f)$ 5

Rešitev. To je geometrijska vrsta s prvim členom $a_1 = \frac{2}{3}$ in količnikom $r = \frac{2}{3}$. Ker $|r| < 1$, vrsta konvergira in velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}.$$

Torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$$

Pravilno je (c).

7. [5 T] Določite vse rešitve neenačbe $|x+1| < 2x$.

Rešitev. Rešujemo po primerih glede na predznak $x+1$.

1. primer: $x+1 \geq 0$ (torej $x \geq -1$). Tedaj $|x+1| = x+1$, zato

$$x+1 < 2x \iff 1 < x \iff x > 1.$$

To je skladno s pogojem $x \geq -1$.

2. primer: $x+1 < 0$ (torej $x < -1$). Tedaj $|x+1| = -(x+1)$, zato

$$-(x+1) < 2x \iff -x-1 < 2x \iff -1 < 3x \iff x > -\frac{1}{3}.$$

Toda tukaj mora veljati tudi $x < -1$, kar je v protislovju z $x > -\frac{1}{3}$. Zato v tem primeru rešitev ni.

Skupaj je rešitev

$$x \in (1, \infty),$$

torej pravilna je možnost (f).

8. [5 T] Koliko je vrednost integrala $\int_0^1 xe^{x^2} dx$?

a) $\frac{1}{2}(-2+e)$ *b)* $\underline{\frac{1}{2}(-1+e)}$ *c)* $\frac{1}{2}(e)$ *d)* $\frac{1}{2}(1+e)$ *e)* $\frac{1}{2}(2+e)$ *f)* 0

Rešitev. Uporabimo substitucijo

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dx = \frac{1}{2}\,du.$$

Meje: pri $x = 0$ je $u = 0$, pri $x = 1$ je $u = 1$. Zato

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \int_0^1 e^u \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

To je $\frac{1}{2}(-1+e)$, torej je pravilna (b).

DRUGI KOLOKVIJ iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

13. januar 2023

1. [10T] Izračunajte
$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\ln x}{3x-2\ln(2x)}.$$

Rešitev. Opazimo, da mora veljati $x>0$ (zaradi $\ln x$ in $\ln(2x)$), zato gre za limito pri $x\to 0^+$. Preuredimo logaritme:
$$3x-2\ln(2x) = 3x-2(\ln 2+\ln x) = 3x-2\ln 2-2\ln x.$$
Ko $x\to 0^+$, velja $\ln x\to -\infty$, zato v števcu dominira $\ln x$, v imenovalcu pa $-2\ln x$ (konstanta $-2\ln 2$ in člen $3x$ sta zanemarljiva v primerjavi z $|\ln x|$). Zato
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln x}{3x-2\ln(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x\left(1+\frac{x}{\ln x}\right)}{-2\ln x\left(1-\frac{3x-2\ln 2}{2\ln x}\right)} = \frac{1+0}{-2\cdot(1-0)} = -\frac{1}{2}.$$

2. [10T] Izračunajte integral
$$\int (\sin(3x+2)+1)\,dx.$$

Rešitev. Integral razbijemo:
$$\int (\sin(3x+2)+1)\,dx = \int \sin(3x+2)\,dx + \int 1\,dx.$$
Pri prvem delu uporabimo substitucijo $u=3x+2$, $du=3\,dx$, torej $dx=\frac{1}{3}\,du$:
$$\int \sin(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$
Drugi del je x. Skupaj:
$$\int (\sin(3x+2)+1)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2)+x+C.$$

3. [15T] Določite enačbe vseh tangent na krivuljo $y = \sqrt{x^2+1}$, ki so vzporedne premici $3y - 2x + 2 = 0$.

Rešitev. Premico $3y - 2x + 2 = 0$ zapišimo v smerni obliki:

$$3y = 2x - 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3},$$

zato je njen smerni koeficient $m = \frac{2}{3}$.

Za krivuljo $y = \sqrt{x^2+1}$ izračunamo odvod:

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Tangenta je vzporedna dani premici natanko tedaj, ko

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{3}.$$

Rešimo enačbo:

$$3x = 2\sqrt{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad 9x^2 = 4(x^2+1) = 4x^2 + 4$$

$$\Longrightarrow \quad 5x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{4}{5}.$$

Ker je leva stran $3x$ lahko negativna, desna pa $2\sqrt{x^2+1} > 0$, mora biti $x > 0$. Torej

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vrednost funkcije:

$$y_0 = \sqrt{x_0^2+1} = \sqrt{\frac{4}{5}+1} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Enačba tangente s smernim koeficientom $\frac{2}{3}$ skozi (x_0, y_0) je

$$y - y_0 = \frac{2}{3}(x - x_0).$$

Poenostavimo:

$$y = \frac{2}{3}x + \left(y_0 - \frac{2}{3}x_0\right) = \frac{2}{3}x + \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3\sqrt{5}}.$$

Torej je iskana tangenta

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3\sqrt{5}}}.$$

4. [15T] Liku, ki vsebuje točko $(0,1)$ in ga omejujeta krivulja $y = 4 - x^2$ ter premica $y = 0$, včrtajte pravokotnik z največjo ploščino. Izračunajte dolžini stranic tega pravokotnika.

Rešitev. Območje je pod parabolo $y = 4 - x^2$ in nad osjo x (premico $y = 0$). Ker območje vsebuje $(0,1)$, gledamo "zgornji" del nad $y = 0$.

Naj bo pravokotnik simetričen glede na y-os, z oglišči $(\pm x, 0)$ in $(\pm x,\ 4-x^2)$, kjer $x \in [0,2]$. Tedaj sta dolžini stranic:

$$\text{širina } = 2x, \qquad \text{višina } = 4 - x^2.$$

Ploščina je

$$A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3, \qquad x \in [0,2].$$

Poiščemo maksimum:

$$A'(x) = 8 - 6x^2, \quad A'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x^2 = 8 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Uporabimo $x \geq 0$.) Ker

$$A''(x) = -12x < 0 \text{ za } x > 0,$$

je pri tem x maksimum.

Zato sta optimalni stranici:

$$\text{širina } = 2x = \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad \text{višina } = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Torej pravokotnik z največjo ploščino ima stranici

$$\boxed{\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ in } \frac{8}{3}}.$$

5. [25T] Določite definicijsko območje funkcije $f(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$. Izračunajte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ter določite v katerih točkah funkcija $f(x)$ doseže minimum in v katerih točkah doseže maksimum. Zapišite intervale naraščanja in padanja ter funkcijo $f(x)$ čimbolj natančno narišite, pri čemer ni potrebno izračunati drugega odvoda.

Rešitev.

(1) Definicijsko območje. Ker je $x^2+1>0$ za vsak $x\in\mathbb{R}$, je tudi $\frac{x}{x^2+1}$ definirano za vse x. Eksponentna funkcija je definirana povsod, zato

$$D_f=\mathbb{R}.$$

(2) Limiti pri $\pm\infty$. Ker

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1/x}{1+1/x^2}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0,$$

dobimo

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=e^0=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=e^0=1.$$

(3) Naraščanje/padanje, ekstremi. Odvajamo:

$$f'(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'.$$

Naj bo $h(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Potem

$$h'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot 1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Torej

$$f'(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}\cdot\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Ker je $e^{\frac{x}{x^2+1}}>0$ in $(x^2+1)^2>0$, predznak f' določa $1-x^2$:

$$f'(x)>0 \text{ za } |x|<1,\qquad f'(x)=0 \text{ pri } x=\pm1,\qquad f'(x)<0 \text{ za } |x|>1.$$

Zato f pada na $(-\infty,-1)$, narašča na $(-1,1)$ in pada na $(1,\infty)$. Sledi:

- pri $x=-1$ se predznak odvoda spremeni iz $-$ v $+$, zato je tam minimum,
- pri $x=1$ se predznak odvoda spremeni iz $+$ v $-$, zato je tam maksimum.

Vrednosti:

$$f(-1)=e^{\frac{-1}{2}}=e^{-1/2},\qquad f(1)=e^{\frac{1}{2}}=e^{1/2}.$$

Torej

$$\boxed{\text{minimum pri } x=-1,\ f(-1)=e^{-1/2},\qquad \text{maksimum pri } x=1,\ f(1)=e^{1/2}.}$$

(4) Skica. Funkcija je povsod pozitivna; pri $x \to \pm\infty$ se približa 1. Pada do minimuma $(-1, e^{-1/2})$, nato narašča do maksimuma $(1, e^{1/2})$, nato spet pada proti 1.

6. [25T] Stružnica za les reže tako, da žico, ki ima obliko grafa funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}}$, $x \in [0, 1]$, zavrti okoli x-osi. V stružnico med $x = 0$ ter $x = 1$ vpnemo dovolj velik kos lesa, da stružnica ne reže po zraku. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo po struženju.

   Rešitev. Ker se graf vrti okoli x-osi, uporabimo metodo kolobarjev. Radij pri danem x je $f(x)$, zato je volumen

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx.$$

Ker je

$$(f(x))^2 = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)},$$

dobimo

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \, dx.$$

Razcepimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Pomnožimo z $(x+1)(x^2+1)$:

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

Uredimo po potencah:

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C).$$

Primerjamo koeficiente:

$$A + B = 0, \qquad B + C = 0, \qquad A + C = 1.$$

Od tod $B = -A$, $C = -B = A$, in nato $A + C = 2A = 1$, zato

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Torej

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)}.$$

Zato

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx.$$

Izračunamo posebej:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\right).$$

Za prvi integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Za drugi integral naredimo $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Zato

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Skupaj:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

Zato je volumen

$$V = \pi\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

Torej

$$\boxed{V = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\ln 2}.$$

IZPIT iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

2. februar 2023

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25 T] Podana je funkcija $f(x) = \frac{(3x+e^{2x})}{x+2e^{2x}}$.

   (a) Izračunajte limito $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   (b) Zapišite tangento na graf funkcije $f(x)$ v točki $x = 0$.

Rešitev.

(a) Ker e^{2x} pri $x \to \infty$ dominira nad polinomi, delimo števec in imenovalec z e^{2x}:

$$f(x) = \frac{3x + e^{2x}}{x + 2e^{2x}} = \frac{\frac{3x}{e^{2x}} + 1}{\frac{x}{e^{2x}} + 2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Torej $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

(b) Naj bo $N(x) = 3x + e^{2x}$ in $D(x) = x + 2e^{2x}$, potem je $f = \frac{N}{D}$ in

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{D(x)^2}.$$

Odvodi:

$$N'(x) = 3 + 2e^{2x}, \qquad D'(x) = 1 + 4e^{2x}.$$

V točki $x = 0$ je $e^0 = 1$, zato

$$f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}, \qquad N'(0) = 5, \qquad D(0) = 2, \qquad D'(0) = 5, \qquad N(0) = 1.$$

Sledi

$$f'(0) = \frac{N'(0)D(0) - N(0)D'(0)}{D(0)^2} = \frac{5 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

Tangenta pri $x = 0$:

$$y = f(0) + f'(0)\,x = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x.$$

2. [25 T] Izračunajte definicijsko območje, ničle in stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije
$$f(x) = x - \ln(\sqrt{x+1}).$$
Čimbolj natančno narišite graf funkcije $f(x)$.

Rešitev.

Najprej poenostavimo:

$$\ln(\sqrt{x+1}) = \ln\big((x+1)^{1/2}\big) = \frac{1}{2}\ln(x+1),$$

zato
$$f(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x+1).$$

(1) Definicijsko območje. Potrebujemo $x + 1 > 0$, torej

$$D_f = (-1, \infty).$$

(2) Ničle. Rešujemo

$$x - \frac{1}{2}\ln(x+1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = \ln(x+1) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = x + 1.$$

Ena rešitev je takoj $x = 0$. Za drugo rešitev lahko uporabimo Lambertovo funkcijo W. Naj bo $y = x + 1$, potem je $x = y - 1$ in

$$e^{2(y-1)} = y \iff ye^{-2y} = e^{-2} \iff (-2y)e^{-2y} = -2e^{-2}.$$

Zato

$$-2y = W(-2e^{-2}), \qquad y = -\frac{1}{2}W(-2e^{-2}), \qquad x = -\frac{1}{2}W(-2e^{-2}) - 1.$$

Ker ima $-2e^{-2} \in (-1/e, 0)$ dve realni veji W, dobimo dve ničli:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}W_0(-2e^{-2}) - 1 \approx -0.796812.$$

(3) Stacionarne točke in naraščanje/padanje.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{2x+1}{2(x+1)}.$$

Ker je $2(x+1) > 0$ na $(-1, \infty)$, je predznak $f'(x)$ enak predznaku $2x+1$. Stacionarna točka:

$$2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Predznak:

$$f'(x) < 0 \text{ na } (-1, -\tfrac{1}{2}), \qquad f'(x) > 0 \text{ na } (-\tfrac{1}{2}, \infty).$$

Torej f pada na $(-1, -\frac{1}{2})$ in narašča na $(-\frac{1}{2}, \infty)$, zato je pri $x = -\frac{1}{2}$ minimum. Vrednost:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$$

(4) Konveksnost/konkavnost.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{2(x+1)}\right) = \frac{1}{2(x+1)^2} > 0 \quad \text{na } (-1, \infty).$$

Zato je f konveksna na celotnem definicijskem območju in konkavna nikjer.

(5) Obnašanje pri robu domene.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x - \frac{1}{2}\ln(x+1)\right) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Graf gre torej iz $+\infty$ (pri -1^+), pada do minimuma pri $x = -\frac{1}{2}$, nato narašča proti $+\infty$; preseka os x v $x \approx -0.796812$ in v $x = 0$.

3. [25 T]

(a) Izračunajte nedoločeni integral $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

(b) Območje pašnika je podano z neenačbami

$$y \le \frac{3}{x^2 - 4}, \quad y \ge -1, \quad -1 \le x \le 1.$$

Ena enota v koordinatnem sistemu meri 1 km. Koliko je ploščina pašnika?

Rešitev.

(a) Razcep na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2) = (A+B)x + (2A-2B).$$

Zato $A+B=0$ in $2A-2B=1$, torej $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$. Sledi

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

(b) Na intervalu $[-1,1]$ je $x^2-4<0$, zato je $\frac{3}{x^2-4} \in [-1, -\frac{3}{4}]$. Območje je torej med spodnjo premico $y=-1$ in zgornjo krivuljo $y=\frac{3}{x^2-4}$. Ploščina:

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{x^2-4} - (-1)\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{3}{x^2-4}\right) dx = 2+3\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4}.$$

Uporabimo rezultat iz (a):

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\ln\tfrac{1}{3} - \ln 3\right) = \frac{1}{4}(-2\ln 3) = -\frac{1}{2}\ln 3.$$

Zato

$$S = 2 + 3\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = 2 - \frac{3}{2}\ln 3 \text{ km}^2.$$

4. [5 T] Koliko je polarni kot kompleksnega števila $-\sqrt{3} + i\sqrt{3}$?

$$a)\ 0 \quad b)\ \frac{\pi}{4} \quad c)\ \frac{\pi}{2} \quad d)\ \frac{3\pi}{4} \quad e)\ \frac{5\pi}{4} \quad f)\ \frac{7\pi}{4}$$

Rešitev. Realni del je negativen, imaginarni pozitiven, zato je število v 2. kvadrantu.

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1 \ \Rightarrow\ \text{referenčni kot } \frac{\pi}{4}.$$

V 2. kvadrantu je

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Pravilno: **d)**.

5. [5 T] Koliko je vsota vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}?$$

$$a)\ 3 \quad b)\ 4 \quad c)\ 5 \quad d)\ 6 \quad e)\ 7 \quad f)\ 8$$

Rešitev. Preoblikujemo člen:

$$\frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{2^{n-1} \cdot 9}{3^n} = \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n .$$

Zato

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{9}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{9}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 6.$$

Pravilno: **d)**.

6. [5 T] Katera izmed spodnjih množic je množica stekališč zaporedja s splošnim členom $a_n = (-1)^n (\frac{n+1}{2n})$?

$$a)\ \{-2\} \quad b)\ \{0\} \quad c)\ \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad d)\ \{-1, 1\} \quad e)\ \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} \quad f)\ \{-2, 2\}$$

Rešitev.

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n} = (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) .$$

Podzaporedje pri sodih n konvergira v $\frac{1}{2}$, pri lihih n konvergira v $-\frac{1}{2}$. Zato je množica stekališč

$$\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} .$$

Pravilno: **e)**.

7. [5 T] Koliko je rešitev neenačbe $|x+1| < 2x$?

a) $x \in (-1, -\frac{1}{3})$ b) $x \in (-1, 1)$ c) $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$

d) $x \in (-1, \infty)$ e) $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$ f) $x \in (1, \infty)$

Rešitev. Rešujemo po primerih.

(i) $x \geq -1$*:* $|x+1| = x+1$, zato

$$x + 1 < 2x \iff 1 < x \iff x > 1.$$

(ii) $x < -1$*:* $|x+1| = -(x+1)$, zato

$$-(x+1) < 2x \iff -1 < 3x \iff x > -\frac{1}{3},$$

kar je v protislovju z $x < -1$. Rešitev v tem primeru ne obstaja.

Skupaj:

$$x \in (1, \infty).$$

Pravilno: **f)**.

8. [5 T] Koliko je vrednost integrala $\int_0^1 (x+3)dx$?

$$a)\ \frac{1}{2} \quad b)\ \frac{3}{2} \quad c)\ \frac{5}{2} \quad d)\ \frac{7}{2} \quad e)\ \frac{9}{2} \quad f)\ \frac{11}{2}$$

Rešitev.

$$\int_0^1 (x+3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}.$$

Pravilno: **d)**.

DRUGI KOLOKVIJ iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

13. januar 2023

1. [10T] Izračunajte
$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\ln x}{3x-2\ln(2x)}.$$

Opazimo, da mora veljati $x > 0$ (zaradi $\ln x$ in $\ln(2x)$), zato gre za limito pri $x \to 0^+$. Preuredimo logaritme:
$$3x - 2\ln(2x) = 3x - 2(\ln 2 + \ln x) = 3x - 2\ln 2 - 2\ln x.$$
Ko $x \to 0^+$, velja $\ln x \to -\infty$, zato v števcu dominira $\ln x$, v imenovalcu pa $-2\ln x$ (konstanta $-2\ln 2$ in člen $3x$ sta zanemarljiva v primerjavi z $|\ln x|$). Zato
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln x}{3x-2\ln(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x\left(1+\frac{x}{\ln x}\right)}{-2\ln x\left(1-\frac{3x-2\ln 2}{2\ln x}\right)} = \frac{1+0}{-2\cdot(1-0)} = -\frac{1}{2}.$$

2. [10T] Izračunajte integral
$$\int (\sin(3x+2)+1)\,dx.$$

Integral razbijemo:
$$\int (\sin(3x+2)+1)\,dx = \int \sin(3x+2)\,dx + \int 1\,dx.$$
Pri prvem delu uporabimo substitucijo $u = 3x+2$, $du = 3\,dx$, torej $dx = \frac{1}{3}\,du$:
$$\int \sin(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C.$$
Drugi del je x. Skupaj:
$$\int (\sin(3x+2)+1)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + x + C.$$

3. [15T] Določite enačbe vseh tangent na krivuljo $y = \sqrt{x^2+1}$, ki so vzporedne premici $3y - 2x + 2 = 0$.

Premico $3y - 2x + 2 = 0$ zapišimo v smerni obliki:

$$3y = 2x - 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3},$$

zato je njen smerni koeficient $m = \frac{2}{3}$.
Za krivuljo $y = \sqrt{x^2+1}$ izračunamo odvod:

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Tangenta je vzporedna dani premici natanko tedaj, ko

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{3}.$$

Rešimo enačbo:

$$3x = 2\sqrt{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad 9x^2 = 4(x^2+1) = 4x^2 + 4$$

$$\Longrightarrow \quad 5x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{4}{5}.$$

Ker je leva stran $3x$ lahko negativna, desna pa $2\sqrt{x^2+1} > 0$, mora biti $x > 0$. Torej

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vrednost funkcije:

$$y_0 = \sqrt{x_0^2+1} = \sqrt{\frac{4}{5}+1} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Enačba tangente s smernim koeficientom $\frac{2}{3}$ skozi (x_0, y_0) je

$$y - y_0 = \frac{2}{3}(x - x_0).$$

Poenostavimo:

$$y = \frac{2}{3}x + \left(y_0 - \frac{2}{3}x_0\right) = \frac{2}{3}x + \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3\sqrt{5}}.$$

Torej je iskana tangenta

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3\sqrt{5}}}.$$

4. [15T] Liku, ki vsebuje točko $(0,1)$ in ga omejujeta krivulja $y = 4 - x^2$ ter premica $y = 0$, včrtajte pravokotnik z največjo ploščino. Izračunajte dolžini stranic tega pravokotnika.

   Območje je pod parabolo $y = 4 - x^2$ in nad osjo x (premico $y = 0$). Ker območje vsebuje $(0,1)$, gledamo "zgornji" del nad $y = 0$.

   Naj bo pravokotnik simetričen glede na y-os, z oglišči $(\pm x, 0)$ in $(\pm x, 4-x^2)$, kjer $x \in [0,2]$. Tedaj sta dolžini stranic:

$$\text{širina } = 2x, \qquad \text{višina } = 4 - x^2.$$

   Ploščina je

$$A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3, \qquad x \in [0,2].$$

   Poiščemo maksimum:

$$A'(x) = 8 - 6x^2, \quad A'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x^2 = 8 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

   (Uporabimo $x \geq 0$.) Ker

$$A''(x) = -12x < 0 \text{ za } x > 0,$$

   je pri tem x maksimum.

   Zato sta optimalni stranici:

$$\text{širina } = 2x = \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad \text{višina } = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

   Torej pravokotnik z največjo ploščino ima stranici

$$\boxed{\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ in } \frac{8}{3}}.$$

5. [25T] Določite definicijsko območje funkcije $f(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$. Izračunajte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ter določite v katerih točkah funkcija $f(x)$ doseže minimum in v katerih točkah doseže maksimum. Zapišite intervale naraščanja in padanja ter funkcijo $f(x)$ čimbolj natančno narišite, pri čemer ni potrebno izračunati drugega odvoda.

   Ker je $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je tudi $\frac{x}{x^2+1}$ definirano za vse x. Eksponentna funkcija je definirana povsod, zato

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Ker

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1/x}{1+1/x^2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0,$$

dobimo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1.$$

Odvajamo:

$$f'(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)'.$$

Naj bo $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Potem

$$h'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Torej

$$f'(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}} \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Ker je $e^{\frac{x}{x^2+1}} > 0$ in $(x^2+1)^2 > 0$, predznak f' določa $1-x^2$:

$$f'(x) > 0 \text{ za } |x| < 1, \qquad f'(x) = 0 \text{ pri } x = \pm 1, \qquad f'(x) < 0 \text{ za } |x| > 1.$$

Zato f pada na $(-\infty,-1)$, narašča na $(-1,1)$ in pada na $(1,\infty)$.
Pri $x = -1$ se predznak odvoda spremeni iz $-$ v $+$, zato je tam minimum, pri $x = 1$ pa iz $+$ v $-$, zato je tam maksimum. Vrednosti:

$$f(-1) = e^{\frac{-1}{2}} = e^{-1/2}, \qquad f(1) = e^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}.$$

Torej

$$\boxed{\text{minimum pri } x=-1,\ f(-1) = e^{-1/2}, \qquad \text{maksimum pri } x = 1,\ f(1) = e^{1/2}.}$$

Funkcija je povsod pozitivna; pri $x \to \pm\infty$ se približa 1. Pada do minimuma $(-1, e^{-1/2})$, nato narašča do maksimuma $(1, e^{1/2})$, nato spet pada proti 1.

6. [25T] Stružnica za les reže tako, da žico, ki ima obliko grafa funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}}$, $x \in [0,1]$, zavrti okoli x-osi. V stružnico med $x = 0$ ter $x = 1$ vpnemo dovolj velik kos lesa, da stružnica ne reže po zraku. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo po struženju.

Ker se graf vrti okoli x-osi, uporabimo metodo kolobarjev. Radij pri danem x je $f(x)$, zato je volumen

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx.$$

Ker je

$$(f(x))^2 = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)},$$

dobimo

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \, dx.$$

Razcepimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Pomnožimo z $(x+1)(x^2+1)$:

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

Uredimo po potencah:

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C).$$

Primerjamo koeficiente:

$$A + B = 0, \qquad B + C = 0, \qquad A + C = 1.$$

Od tod $B = -A$, $C = -B = A$, in nato $A + C = 2A = 1$, zato

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Torej

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)}.$$

Zato

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1} \, dx.$$

Izračunamo posebej:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} \, dx = \frac{1}{2} [\ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\right).$$

Za prvi integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Za drugi integral naredimo $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Zato

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Skupaj:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

Zato je volumen

$$V = \pi\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

Torej

$$\boxed{V = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\ln 2}.$$

IZPIT iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

2. februar 2023

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25 T] Podana je funkcija $f(x) = \frac{3x+e^{2x}}{x+2e^{2x}}$.
   (a) Izračunajte limito $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
   (b) Zapišite tangento na graf funkcije $f(x)$ v točki $x = 0$.

(a) Ker pri $x \to \infty$ eksponent e^{2x} dominira nad polinomi, delimo števec in imenovalec z e^{2x}:

$$f(x) = \frac{3x + e^{2x}}{x + 2e^{2x}} = \frac{\frac{3x}{e^{2x}} + 1}{\frac{x}{e^{2x}} + 2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Torej $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

(b) Naj bo $N(x) = 3x + e^{2x}$ in $D(x) = x + 2e^{2x}$. Potem je $f = \frac{N}{D}$ in

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{D(x)^2}, \qquad N'(x) = 3+2e^{2x}, \quad D'(x) = 1+4e^{2x}.$$

V točki $x = 0$ dobimo $e^0 = 1$:

$$f(0) = \frac{1}{2}, \qquad f'(0) = \frac{(3+2)\cdot(0+2) - (0+1)\cdot(1+4)}{(0+2)^2} = \frac{10-5}{4} = \frac{5}{4}.$$

Tangenta pri $x = 0$ je zato

$$y = f(0) + f'(0)\,x = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x.$$

2. [25 T] Izračunajte definicijsko območje in stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije
$$f(x) = x - \ln(\sqrt{x+1}).$$
Čimbolj natančno narišite graf funkcije $f(x)$.

Najprej poenostavimo
$$\ln(\sqrt{x+1}) = \ln\big((x+1)^{1/2}\big) = \frac{1}{2}\ln(x+1),$$
torej
$$f(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x+1).$$

Definicijsko območje. Potrebujemo $x+1>0$, zato
$$D_f = (-1,\infty).$$

Odvodi in stacionarna točka.
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{2x+1}{2(x+1)}.$$
Ker je $2(x+1)>0$ na $(-1,\infty)$, je $f'(x)=0$ natanko pri
$$2x+1=0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Naraščanje in padanje.
$$f'(x)<0 \text{ za } x\in(-1,-\tfrac{1}{2}), \qquad f'(x)>0 \text{ za } x\in(-\tfrac{1}{2},\infty).$$
Torej f pada na $(-1,-\frac{1}{2})$ in narašča na $(-\frac{1}{2},\infty)$; stacionarna točka $x=-\frac{1}{2}$ je minimum.

Konveksnost/konkavnost.
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{2(x+1)}\right) = \frac{1}{2(x+1)^2} > 0 \quad \text{na } (-1,\infty).$$
Zato je f konveksna na celotnem definicijskem območju in konkavna nikjer.

Za skico je uporabno še:
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$$

3. [25 T]

(a) Izračunajte nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$.

(b) Območje pašnika je podano z neenačbami

$$y \leq \frac{3}{x^2-4}, \qquad y \geq -1, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Ena enota v koordinatnem sistemu meri 1 km. Koliko je ploščina pašnika?

(a) Razcepimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2) = (A+B)x + (2A-2B).$$

Zato $A+B=0$ in $2A-2B=1$, torej $A=\frac{1}{4}$ in $B=-\frac{1}{4}$. Sledi

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

(Ekvivalentno: $\frac{1}{4}\ln|2-x| - \frac{1}{4}\ln|2+x| + C$.)

(b) Na intervalu $[-1,1]$ velja $x^2-4<0$, zato je $\frac{3}{x^2-4} \leq -\frac{3}{4}$ in je nad premico $y=-1$. Ploščina je zato

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{x^2-4} - (-1)\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{3}{x^2-4}\right)dx = 2+3\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-4}.$$

Uporabimo rezultat iz (a):

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln 3\right) = -\frac{1}{2}\ln 3.$$

Torej

$$S = 2 + 3\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = 2 - \frac{3}{2}\ln 3\ \text{km}^2.$$

4. [5 T] Koliko je polarni kot kompleksnega števila $-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$?

$$a)\ 0 \quad b)\ \frac{\pi}{4} \quad c)\ \frac{\pi}{2} \quad d)\ \underline{\frac{3\pi}{4}} \quad e)\ \frac{5\pi}{4} \quad f)\ \frac{7\pi}{4}$$

Realni del je negativen, imaginarni pa pozitiven, zato je število v 2. kvadrantu.

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1 \;\Rightarrow\; \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

5. [5 T] Koliko je vsota vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}?$$

$a)$ 3 $b)$ 4 $c)$ 5 $d)$ $\underline{6}$ $e)$ 7 $f)$ 8

Preoblikujemo člen:

$$\frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{2^{n-1}\cdot 9}{3^n} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Zato

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{9}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{9}{2}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = 6.$$

6. [5 T] Katera izmed spodnjih množic je množica stekališč zaporedja s splošnim členom $a_n = (-1)^n(\frac{n+1}{2n})$?

$a)$ $\{-2\}$ $b)$ $\{0\}$ $c)$ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ $d)$ $\{-1,1\}$ $e)$ $\underline{\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}}$ $f)$ $\{-2,2\}$

$$a_n = (-1)^n\frac{n+1}{2n} = (-1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right).$$

Za soda n dobimo $a_n \to \frac{1}{2}$, za liha n pa $a_n \to -\frac{1}{2}$, zato je množica stekališč

$$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}.$$

7. [5 T] Koliko je rešitev neenačbe $|x+1| < 2x$?

a) $x \in (-1, -\frac{1}{3})$ b) $x \in (-1, 1)$ c) $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$

d) $x \in (-1, \infty)$ e) $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$ f) $x \in \underline{(1, \infty)}$

Rešujemo po primerih.

(i) $x \geq -1$*:* $|x+1| = x+1$, zato

$$x + 1 < 2x \iff x > 1.$$

(ii) $x < -1$*:* $|x+1| = -(x+1)$, zato

$$-(x+1) < 2x \iff x > -\frac{1}{3},$$

kar je v protislovju z $x < -1$. Zato tu ni rešitev.

Skupaj dobimo $x \in (1, \infty)$.

8. [5 T] Koliko je vrednost integrala $\int_0^1 (x+3) dx$?

$$a)\ \frac{1}{2} \quad b)\ \frac{3}{2} \quad c)\ \frac{5}{2} \quad d)\ \frac{7}{\underline{2}} \quad e)\ \frac{9}{2} \quad f)\ \frac{11}{2}$$

$$\int_0^1 (x+3)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}.$$

IZPIT iz MATEMATIKE I
Visokošolski študij

13. februar 2024

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25 T] Podano je zaporedje s splošnim členom
$$a_n = \frac{n^2 - 10n + 2}{n+1}.$$
   a) Analizirajte monotonost zaporedja (kje zaporedje pada ter kje narašča).
   b) Določite supremum, infimum, maksimum in minimum tega zaporedja, če obstajajo.

Rešitev: Najprej zapišimo zaporedje v bolj uporabni obliki (deljenje polinomov):
$$\frac{n^2 - 10n + 2}{n+1} = n - 11 + \frac{13}{n+1}.$$
Od tod je takoj razvidno, da $a_n \to +\infty$ (zato supremum ni končen in maksimum ne obstaja).

Za monotonost izračunamo razliko:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 - 10(n+1) + 2}{n+2} - \frac{n^2 - 10n + 2}{n+1} = \frac{n^2 + 3n - 11}{(n+1)(n+2)}.$$
Ker je $(n+1)(n+2) > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, predznak razlike določa $n^2 + 3n - 11$. Rešimo $n^2 + 3n - 11 = 0$:
$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 44}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}.$$
Pozitivna ničla je približno $\frac{-3+\sqrt{53}}{2} \approx 2.14$, zato velja:
$$a_{n+1} - a_n < 0 \text{ za } n = 1, 2, \qquad a_{n+1} - a_n > 0 \text{ za } n \geq 3.$$

Torej

$$a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5 < \cdots$$

in zaporedje pada do $n = 3$, nato narašča.

Za minimum izračunamo prvih nekaj členov:

$$a_1 = \frac{1 - 10 + 2}{2} = -\frac{7}{2}, \qquad a_2 = \frac{4 - 20 + 2}{3} = -\frac{14}{3}, \qquad a_3 = \frac{9 - 30 + 2}{4} = -\frac{19}{4}.$$

Ker od $n = 3$ naprej narašča, je najmanjši člen a_3, zato:

$$\min a_n = a_3 = -\frac{19}{4}, \qquad \inf a_n = -\frac{19}{4}.$$

Ker $a_n \to +\infty$, je

$$\sup a_n = +\infty, \qquad \max a_n \text{ ne obstaja.}$$

2. [25T] Določite definicijsko območje ter izračunajte ničle, pole, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja funkcije

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

Graf funkcije $f(x)$ čimbolj natančno narišite.

Rešitev: Najprej poenostavimo:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}.$$

Definicijsko območje: $x \neq 0$, torej $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ničle: $f(x) = 0 \iff x^3 + 1 = 0 \iff x = -1$. Torej je edina realna ničla pri $x = -1$.

Poli in asimptote: Pri $x = 0$ ima funkcija pol (ker je imenovalec x^2), in velja

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$

zato je navpična asimptota $x = 0$. Ker

$$f(x) - x = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0,$$

je poševna asimptota $y = x$.

Stacionarne točke in naraščanje/padanje:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}.$$

Stacionarne točke dobimo iz $f'(x) = 0$:

$$x^3 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

Predznak $f'(x)$:

- za $x < 0$: $x^3 < 0$ in $x^3 - 2 < 0$, zato je $\frac{x^3-2}{x^3} > 0$;
- za $0 < x < \sqrt[3]{2}$: $x^3 > 0$ in $x^3 - 2 < 0$, zato je $f'(x) < 0$;
- za $x > \sqrt[3]{2}$: $x^3 > 0$ in $x^3 - 2 > 0$, zato je $f'(x) > 0$.

Torej

$$f \text{ narašča na } (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty), \qquad f \text{ pada na } (0, \sqrt[3]{2}).$$

Pri $x = \sqrt[3]{2}$ je minimum (na desni veji), njegova vrednost je

$$f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} = 2^{1/3} + 2^{-2/3} = \frac{3}{2^{2/3}}.$$

Za skico grafa: leva veja (na $(-\infty, 0)$) je naraščajoča, gre proti $-\infty$ pri $x \to -\infty$, seka os x pri $x = -1$ in gre v $+\infty$ pri $x \to 0^-$. Desna veja (na $(0, \infty)$) gre iz $+\infty$ pri $x \to 0^+$, pada do minimuma pri $x = \sqrt[3]{2}$, nato narašča in se približuje premici $y = x$.

3. [25 T] Stružnica za les reže tako, da žico, ki ima obliko grafa funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+2}}, \qquad x \in [0, 1],$$

zavrti okoli x-osi. Izračunajte volumen telesa, ki ga dobimo po struženju.

Rešitev: Ker vrtimo okoli x-osi, uporabimo metodo kolobarjev:

$$V = \pi \int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \, dx = \pi \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2} \, dx.$$

Integral razbijemo:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2} \, dx = \int \frac{x}{x^2+2} \, dx + \int \frac{1}{x^2+2} \, dx.$$

Prvi del:
$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2).$$
Drugi del (standardni integral):
$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$
Torej
$$\int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$
Vstavimo meje:
$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
Zato je
$$\boxed{V = \pi\left(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).}$$

4. [5 T] Koliko je polarni kot kompleksnega števila $\sqrt{3}+3i$ v radianih?

$$a)\ 0 \quad b)\ \underline{\frac{\pi}{3}} \quad c)\ \frac{\pi}{4} \quad d)\ \frac{\pi}{6} \quad e)\ \pi \quad f)\ 2\pi$$

Ker je $z = \sqrt{3}+3i$ v prvem kvadrantu, je
$$\tan\varphi = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

5. [5 T] Koliko je smerni koeficient normale na graf funkcije $f(x) = 2\ln x^2$ pri $x = 1$?

$$a)\ 4 \quad b)\ 2 \quad c)\ 0 \quad d)\ -\frac{1}{2} \quad e)\ \underline{-\frac{1}{4}} \quad f)\ -\frac{1}{6}$$

$$f(x) = 2\ln(x^2) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot\frac{2x}{x^2} = \frac{4}{x}.$$
Torej je smerni koeficient tangente pri $x = 1$ enak $f'(1) = 4$, zato je smerni koeficient normale
$$m_n = -\frac{1}{4}.$$

6. [5 T] Koliko je vsota vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n ?$$

$a)$ 0 $\quad b)$ 1 $\quad c)$ $\frac{1}{8}$ $\quad d)$ $\frac{1}{10}$ $\quad d)$ $\underline{\frac{1}{12}}$ $\quad e)$ $\frac{1}{14}$ $\quad f)$ $\frac{1}{16}$

Gre za geometrijsko vrsto s količnikom $r = \frac{1}{4}$ in prvim členom $a_2 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{a_2}{1-r} = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{12}.$$

7. [5 PT] Katera izmed spodnjih vrst je konvergetna?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$

c) $\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

Opomba: pri (a),(c),(e) je smiselno začeti pri $n = 1$.

- (a) harmon"ična vrsta divergira.
- (b) $\frac{n^2}{n+1} \sim n$, zato člen ne gre proti 0 in vrsta divergira.
- (c) po Leibnizovem kriteriju $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira, ker $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$.
- (d) geometrijska vrsta s $r = \frac{3}{2} > 1$ divergira.
- (e) to je $-\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, ki divergira (p-vrsta z $p = \frac{1}{2}$).

- (f) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \neq 0$, zato divergira.

Zato je pravilna $\underline{\text{(c)}}$.

8. [5 T] Koliko je vrednost integrala $\int_1^2 x\,dx$?

$$a)\ 0 \quad b)\ \frac{1}{2} \quad c)\ 1 \quad d)\ \underline{\frac{3}{2}} \quad e)\ 2 \quad f)\ \frac{5}{2}$$

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}.$$